Anales PANEL'81/12 JAIIO
Sociedad Argentina de informática
e Investigación Operativa. Buenos Aires, 1981

REPRESENTACION PLANA DE GRAFOS: ALGORITMOS DE COMPUTO

Francisco Javier Diaz (*)

Centro de Técnicas Analógico-Digitales
Facultad de Ingeniería, Univ. Nac. de la Plata
La Plata, Argentina

RESUMEN:

Son muchas las disciplinas en las que se requieren grafos por distintos motivos. Y resulta de suma utilidad para múltiples aplicaciones, como ser diseño de circuitos integrados o de máscaras de híbridos, poder testear la planaridad de un grafo y dar una representación plana del mismo.

El algoritmo presentado además de esto, tiene otros aspectos: por un lado se logra la mayor representación plana de un grafo, esto es, se obtiene una representación plana del grafo original tal que no existe otra que incluya un número mayor de aristas; por otro lado el método nos permite darle un contorno fijo al grafo de modo de que las otras aristas que se tracen no afecten a dicho contorno, de ser esto posible.

INTRODUCCION:

Se han seguido las líneas generales propuestas por Demoucron, Malgrange y Pertuiset (ver Ref. 3). Los métodos propuestos aquí difieren sustancialmente de la implementación dada por este Centro de Técnicas Analógico-Digitales en la Ref. 2 . Las diferencias atañen tanto a la forma, como al fondo. Entre las primeras debe destacarse que a los fines de mejorar primordialmente el aspecto tiempo de cómputos se ha trabajado con las listas de adyacencia y los contornos de las caras se han guardado en forma de vectores circulares. También se procedió a armar pi

(*) Trabajo realizado bajo la dirección del Ing. Antonio A. Quijano.

El autor agradece la colaboración de la Dra. Lia Oubiña y el asesoramiento del Ing. Armando De Giusti.

las con la información de las caras a las que pertenece cada vértice. Del 2°tipo de diferencias deben destacarse varias mejoras teóricas y agregados que se han hecho al método original de Demoucron. Estas diferencias surgirán claramente de cotejar la versión aquí presentada con la propuesta por Demoucron en Referencia 3.

ALGORITMO UTILIZADO

El método utilizado es un método constructivo y hace uso del concepto fundamental de pieza. Una pieza es una porción del grafo original que aún no figura en el grafo que se está construyendo. Más específicamente, hay dos tipos de piezas. Las piezas Tipo A son las aristas del grafo original que no forman parte del subgrafo que se construyó hasta el momento pero cuyos vértices sí pertenecen a dicho subgrafo. Las piezas Tipo B, son las componentes conexas del grafo original menos las aristas que ya fueron consideradas hasta el momento.Las aristas que tienen como extremo un vértice que pertenece al grafo que se está construyendo se consideran sólo como incidentes. Y a dichos vértices se los denomina pies de la componente a las que pertenece el otro extremo de la arista. Con esta definición resulta claro que una pieza se podrá trazar en una cara dada,sólo si todos sus pies pertenecen al contorno de dicha cara.

Destaquemos que un ciclo determina dos caras o porciones del plano,una interior y otra exterior. De ahora en más nos referiremos a ellas como cara finita y cara infinito.Más precisamente la cara infinito es aquella cara cuyo contorno es tal que en la cara finita que éste determina yacen todos los otros vértices y aristas del grafo.

El método implementado consiste en los siguientes pasos

1) Se entra el grafo en forma de listas de adyacencia.

2) Si se le fija (como dato) una cara infinito, se considera a dicho contorno como delimitando sólo una cara y se va a 6).

3) Se eliminan los vértices de grado 2 (se los reemplaza por una arista).

4) Se ordenan las listas de adyacencia por los grados de los vértices (de menor a mayor) y se procede a buscar un ciclo inicial al cual se lo trata de extender lo más posible. En general este proceso nos lleva a un ciclo hamiltoniano (esto es un ciclo que contiene todos los vértices) si el grafo posee al menos uno.

5) Si el ciclo inicial no es hamiltoniano, ir a 6). En caso contrario construir el grafo auxiliar de incompatibilidad entre piezas. A este grafo auxiliar se le borrarán un número mínimo de vértices (correspondientes a aristas del grafo ori-

ginal de modo de que el grafo de incompatibilidades sea bicoloreable por vértices. Finalmente, se emite un mensaje donde se indica que las aristas correspondientes a vértices a los que se les asignó un mismo color deben trazarse en una misma cara y los correspondientes al otro color en la otra cara. Ir a 11).

6) Se testea que el número de aristas sea menor o igual a 3 veces el número de vértices menos 6. De no ser así se emite un mensaje de no planaridad y se va a 11).

7) Se ve si el número de caras trazadas es igual al número de aristas menos el número de vértices más 2. De ser así imprimir un mensaje de que el grafo original resultó planar, y los contornos de las caras del grafo e ir a 11).

8) Se genera una pieza del grafo. Si ya se generaron todas se traza la última pieza generada y se va a 7).

9) La pieza generada es tipo A. Si no es así ir a 10). Se testea que los extremos de las aristas pertenezcan al menos a dos caras. De ser así se va a 8) a generar una nueva pieza. Si ambos vértices sólo tienen una cara en común se trazará dicha pieza tipo A en esa cara, generando 2 caras nuevas de las cuales 1 tomará el lugar de la vieja. Ir a 7). Si no están ambos en ninguna cara se emite un mensaje de no planaridad e ir a 11).

10) La pieza generada es tipo B. Se debe verificar que todos sus pies pertenezcan al menos a los contornos de dos caras. De ser así se va a 8) a generar una nueva pieza. Si la totalidad de sus pies sólo figuran en una única cara se procede a partirla trazando una cadena de la pieza generando consecuentemente una nueva cara y modificando la vieja. Ir a 7). Si por el contrario no existe ningún contorno de la cara en donde figuran todos los pies de la pieza que se está examinando se emite un mensaje de no planaridad y se va a 11).

11) Fin del proceso.

FIJAR LA CARA INFINITO:

Cuando el problema real requiere que en la cara infinito aparezcan sólo determinados vértices en un orden prefijado, se procede considerando a dicho ciclo inicial como contorno de una sola cara o sea se considera que la cara infinito no posee vértices y por tanto no se puede trazar nada en ella. Luego se continúa según el método común de Demoucron de Ref. 3.

ELIMINACION DE LOS VERTICES DE GRADO 2:

A los fines de testeo de planaridad los vértices de grado 2 se pueden considerar simplemente como aristas partidas o divididas, y en consecuencia es redundante el considerar dichos vértices. También debe notarse que el considerar aristas múltiples no afecta en nada al testeo de planaridad por tanto se las trabaja como aristas simples.

BUSQUEDA DEL CICLO INICIAL:

Primero se reordenan las listas de adyacencia clasificando a los vértices de menor a mayor grado. Luego se pasa al proceso de búsqueda exhaustiva de un ciclo inicial. Posteriormente se trata de extender dicho ciclo inicial agregándole cadenas de modo de aumentar el número de vértices que lo forman. El proceso se detiene cuando o bien ya se encontró un ciclo que contiene la totalidad de los vértices, o bien todas las cadenas suceptibles de incorporarse no hacen aumentar el número de vértices del ciclo ya obtenido.

OBTENCION DE LA MAYOR REPRESENTACION PLANAR DE UN GRAFO HAMILTONIANO:

Cuando se dispone de un ciclo hamiltoniano se obtiene la mayor representación planar del grafo original. Esto significa que se encuentra una representación plana del grafo donde se omiten un número mínimo de aristas del grafo origen de modo de que el subgrafo dado sea planar y que cualquier otro subgrafo que contenga un número mayor de aristas no lo sea.

La idea del procedimiento utilizado proviene de una sugerencia del artículo de Ref. 3.

Una vez obtenido un ciclo inicial hamiltoniano lo único que falta trazar son aristas. Se genera pues un grafo auxiliar donde los vértices representan las aristas del grafo original que aún faltan trazar. Dos vértices en el grafo auxiliar serán adyacentes sí y sólo sí las piezas correspondientes en el grafo origen son incompatibles, o sea no pueden trazarse ambas en una misma cara.

Luego se procede a la bicoloreación de este grafo auxiliar o de incompatibilidades. Esto es, se trata de asignar uno de dos colores posibles a cada vértice de modo de que a vértices adyacentes no les corresponda un mismo color.

De no ser posible bicolorear al grafo, esto se debe a la existencia de uno o más ciclos de longitud impar y no es posible el trazado en forma planar de las aristas correspondientes del grafo origen. Acto seguido se elimina del análisis a la arista asociada al vértice que más conflictos produjo. Más específicamente sería el vértice que tiene mayor número de adyacentes que tengan asociado el mismo color que él. Se procede pues a una nueva coloración del grafo.

Una vez que se ha bicoloreado el grafo sin que haya producido ningún conflicto, se tiene una partición del conjunto de las aristas del grafo origen en dos conjuntos: uno de estos con juntos tendrá los vértices correspondientes en el grafo auxiliar de un color y el conjunto restante será el asociado al otro color.

Resulta claro que las aristas pertenecientes a uno de estos conjuntos se trazarán por la cara finita y las del otro conjunto por la cara infinito.

COTAS PARA TESTEO DE PLANARIDAD:

En el método implementado se utilizan 2 números claves. El primero es igual a tres veces el número de vértices menos seis. Este número nos da una cota superior del número de aristas que puede, como máximo,tener un grafo planar. O sea cuando el número de aristas del grafo origen supera esta cota,se tiene que dicho grafo es no planar.

El otro número, conocido como número de Euler, es el número de aristas menos el número de vértices más dos,y es la cantidad de caras que posee un grafo planar biconexo, sin lazos ni aristas múltiples. Nos permite saber si ya terminamos de generar todas las caras del grafo.

BUSQUEDA DE PIEZAS:

Se barren todos los vértices que ya han sido considerados y se ve si de ellos parten aristas qúe aún no hayan sido consideradas. De ser así se genera la pieza correspondiente, ya sea tipo A ó tipo B. Debe destacarse a fin de evitar reiteraciones inútiles una vez generada una pieza tipo B, no se la volverá a generar hasta después de haber trazado alguna pieza.

EXAMEN DE LAS PIEZAS:

Una vez generada una pieza, ya sea tipo A ó tipo B, se toman sus pies y se observa que los mismos formes parte deal menos dos contornos de caras. Esto implica que dicha pieza puede trazarse más adelante (para ver la justificación teórica del método ver Ref. 2 y 3).

Si en cambio los pies de la pieza figuran sólo en el contorno de una cara se determina en la pieza una cadena que tenga origen y termine en dos pies distintos. Luego se trazará dicha cadena en la cara encontrada, modificándose consecuentemente el contorno de dicha cara y generándose una cara nueva. Debe notarse que el hecho de haber modificado el contorno de una cara (y generado otra) puede forzar que alguna de las piezas que anteriormente se verificó que se podrían trazar en más de una cara puedan ahora trazarse sólo en una cara. Por tanto después de trazar una pieza es necesario verificar nuevamente en cuántas caras pueden trazarse todas las piezas restantes.

En caso de que los pies de una pieza no estén es su totalidad incluídos en el contorno de ninguna cara, se tiene que dicha pieza no puede trazarse planarmente y por tanto el grafo original resulta no planar.

EJEMPLOS:

Para ilustrar las técnicas explicadas anteriormente, se adjuntan un par de ejemplos. En el ejemplo 1 se parte del grafo de la Figura 1.a. Se procede a la eliminación de los vértices de grado 2 obteniéndose el grafo reducido de la Figura 1.b. En la Figura 1.c. puede verse, en trazo grueso, el ciclo inicial hallado y en trazo más fino las piezas tipo A que por ser el ciclo inicial hamiltoniano son el único tipo de piezas que aparecen.

A cada arista se le asignó un número que es el número que se le dió al vértice asociado a esa pieza tipo A en el grafo auxiliar de incompatibilidades.

En la Figura 1.d. puede verse a dicho grafo auxiliar de incompatibilidades.

Este grafo no es bicoloreable por vértices. Para que lo sea, debe eliminarse el vértice encerrado por una línea de puntos de la Figura 1.d., que se corresponde a la arista (24,26).

Finalmente, en la Figura 1.e. puede verse la representación planar obtenida del grafo reducido trazando las piezas tipo A asociadas a vértices con un mismo color en misma cara.

Para que se vea la equivalencia entre el grafo reducido y el grafo original, se procedió a extender la representación planar del grafo reducido hasta obtener una representación planar del grafo original (ver Figura 1.f.).

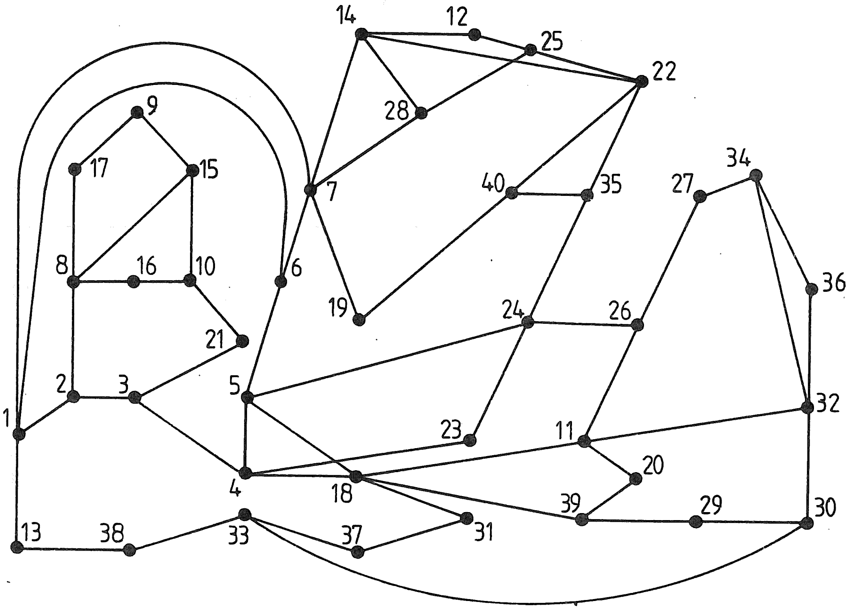

FIGURA 1a

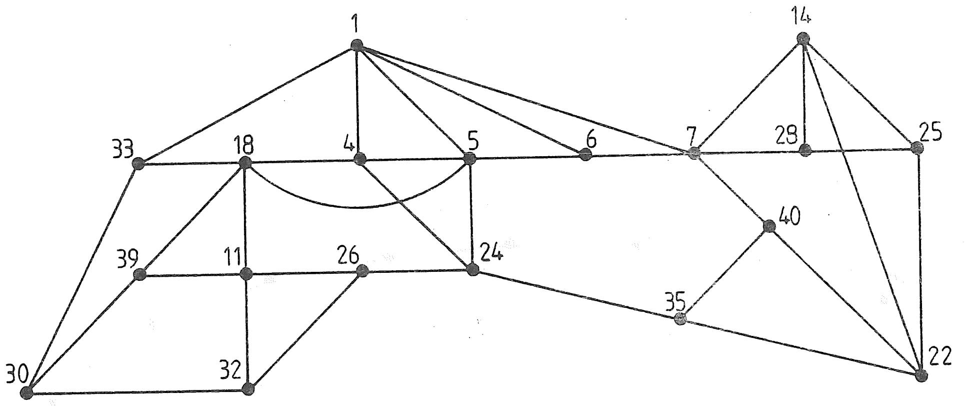

FIGURA 1 b

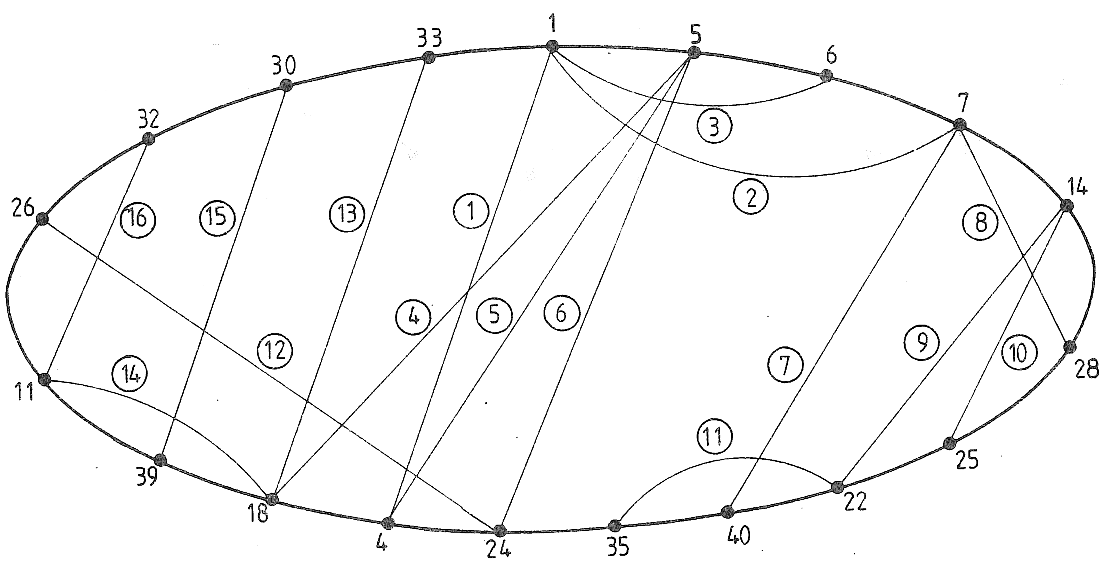

FIGURA 1 c

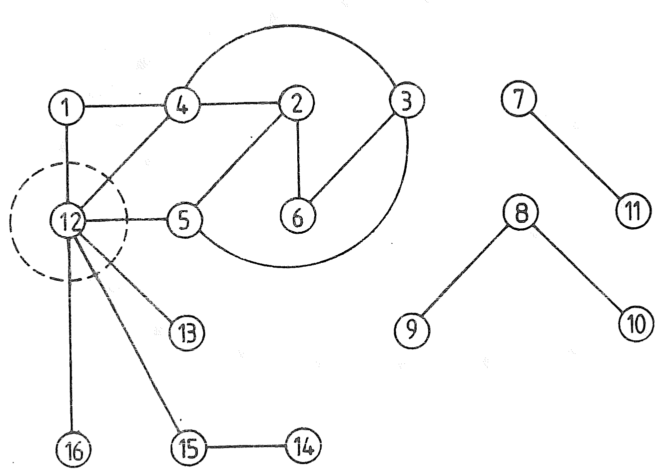

FIGURA 1 d

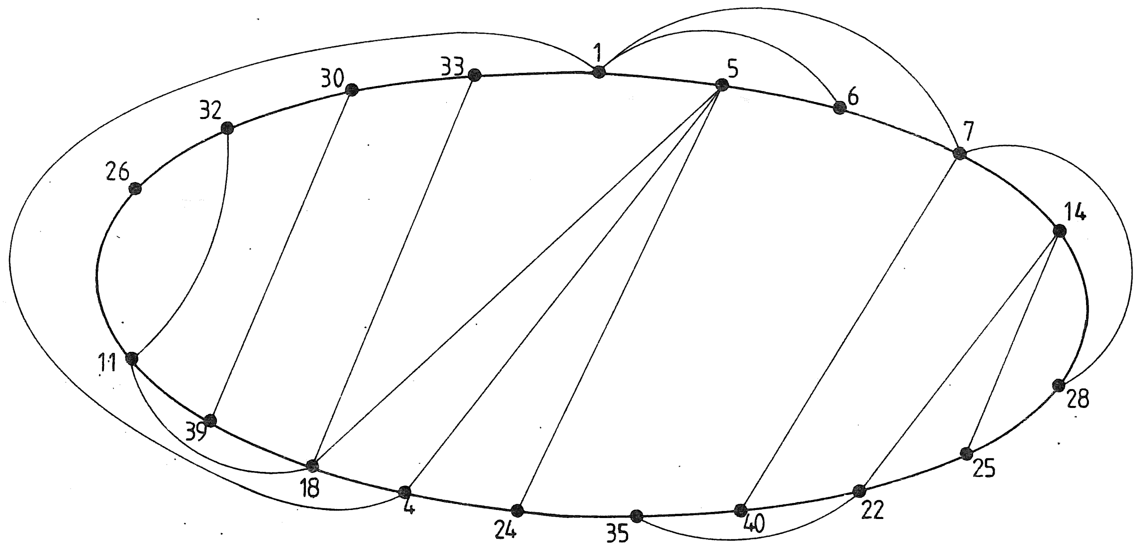

FIGURA 1 e

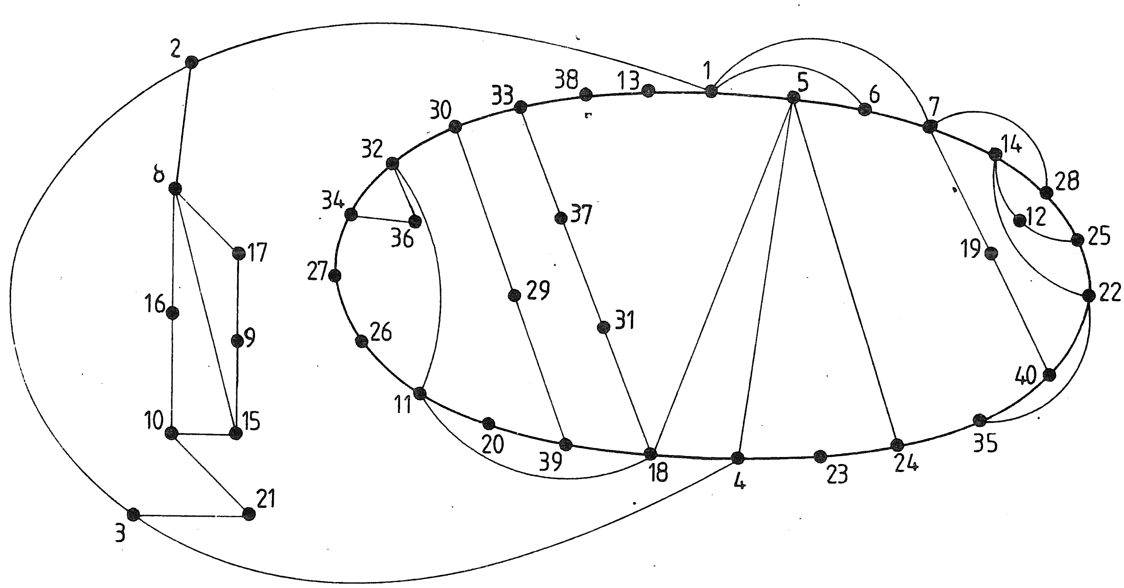

FIGURA 1 f

En el ejemplo 2, al grafo original de la Figura 2.a. se le fija un contorno (la cara infinito). En la Figura 2.b. puede verse dicho contorno en trazo fino, y en trazo grueso la pieza tipo B que nos falta trazar.

En los sucesivos gráficos de la Figura 2.c. se muestra la sucesión de grafos que se van construyendo hasta llegar a una representación plana del grafo origen.

En este ejemplo puede verificarse que el número de caras de grafos es exactamente el número de Euler o sea el duplo del número de aristas, menos el número de vértices más 2. El grafo del ejemplo 2 es un grafo planar saturado,esto significa que si se le agregara una arista cualquiera más, se obtendría un grafo no planar. Este hecho se podría deducir de que el número de aristas del grafo alcanza la cota antes mencionada de 3 veces el número de vértices menos 6.Debe destacarse que si se hubiera fijado como contorno de la cara infinito el ciclo (1,2,4,3,) .se hubiera obtenido un mensaje de no planaridad por la imposibilidad de trazar aristas en la cara infinito cuando ésta, nos es dada como dato.

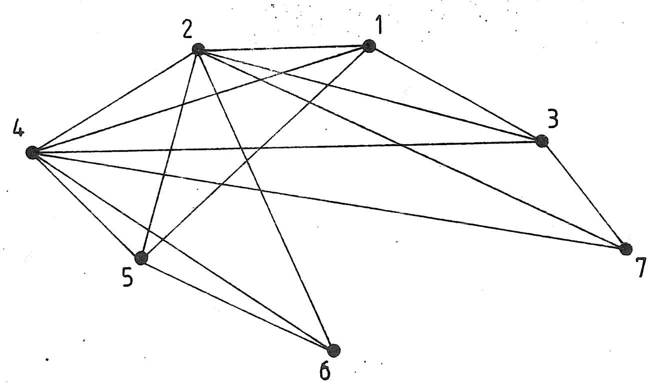

FIGURA 2a

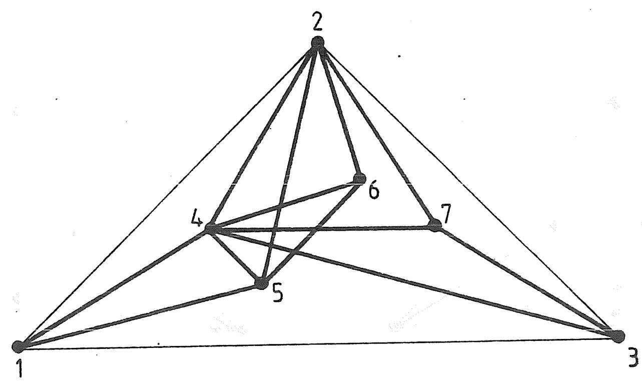

FIGURA 2b

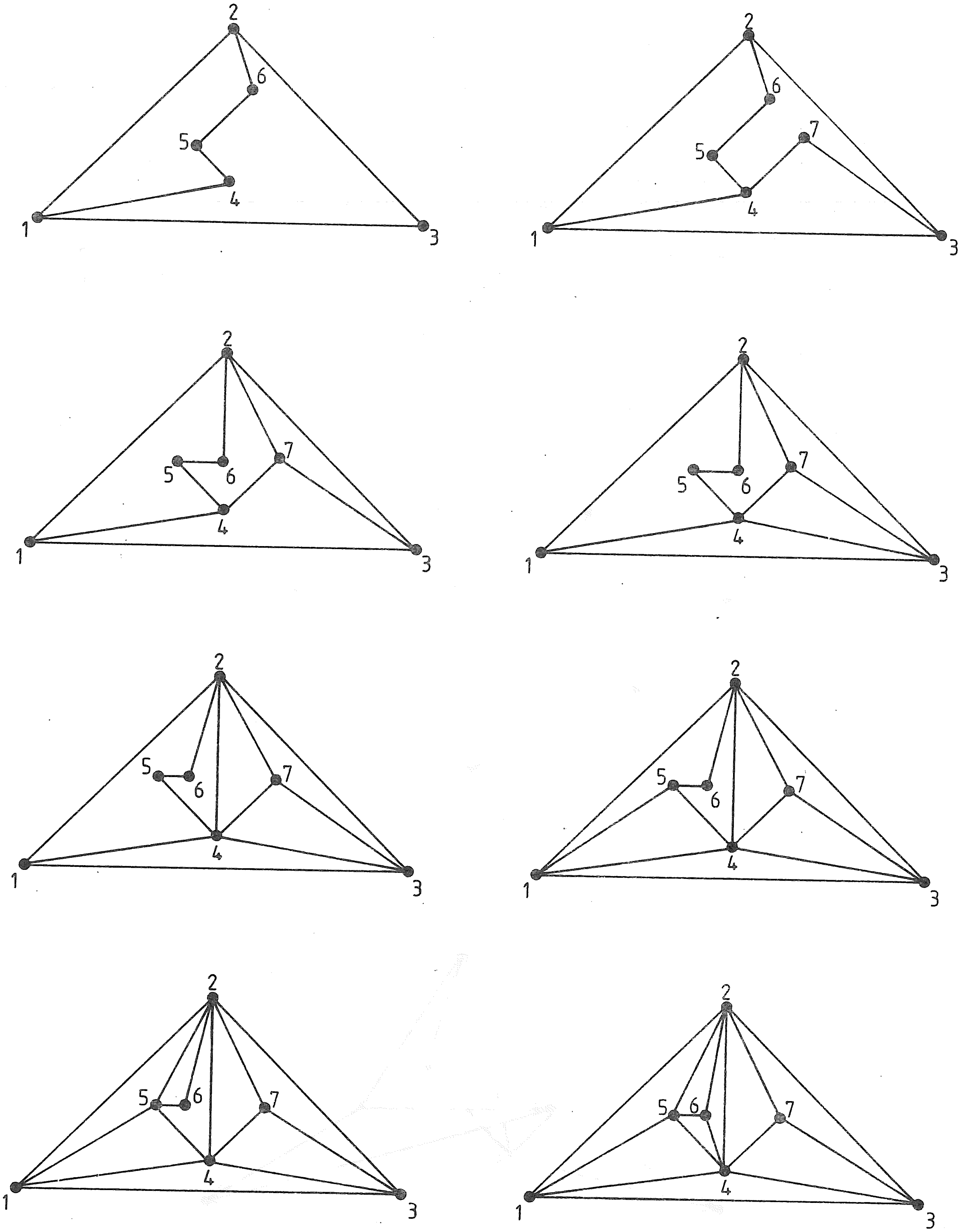
2 6 5 4 1 3
2 6 7 5 4 1 3
2 7 5 6 4 1 3
2 7 5 6 4 1 3
2 5 6 7 4 1 3
2 5 6 7 4 1 3
2 5 6 7 4 1 3
2 5 6 7 4 1 3

FIGURA 2c

CONCLUSIONES:

En la siguiente etapa se procederá a un estudio exhaustivo de los tiempos tratando de optimizar los algoritmos empleados de modo de salvar ese factor crítico en muchos problemas reales. Una vez alcanzada dicha meta se tratará de emplear las técnicas aquí expuestas a casos reales de diseño de máscaras de híbridos y circuitos integrados.

REFERENCIAS:

1) C. Berge - "Theorie des graphes et ses applications" - DUNOD 1963.

2) A. De Giusti, C. Gutzner, G. Rossi y J. Diaz - "Planarización de grafos por computadora. Aplicación a circuitos electrónicos" - Publicación del Plan Nacional de Electrónica, Año I, N°3, pag. 4-10, Noviembre 1979.

3) G. Demoucron, Y. Malgrange y R. Pertuiset - "Graphes planaires, Reconnaissance et construction des representations". Revue Francaise de Recherche Operationnelle. Vol. 8, pag 33-47. Año 1964.

4) R.J. Fandree y R. H. Schelp - "Varions length paths in graphs". Theory and Applications of Graphs. Proceedings, Michigan, May 1976. Springer-Verlag.

5) J.G. Penaud - "Algorithmes de Planarite" Universite de Bordeaux.

6) F. Rubin - "An improved algorithm for testing the planarity of a graph" IEEE Transactions on Computers. Vol. C-24, N°2. Febrero 1975, pag. 113-121.

7) D. de Wella - "A note on graph coloring" R.A.I.R.O., R-1. - 1974, pag. 49-53.